Bài 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN)

A- TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. ĐỊNH NGHĨA:

Định nghĩa 1. Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Ta viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 2. Dãy số (u_n) có giới hạn là a khi $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$. Ta viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

(Ta có thể kí hiệu $lim u_n = a$ thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$)

2. MỘT SỐ GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT:

① $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

② $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

③ $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ với $k \in \mathbb{N}*$

④ $\lim C = C \ \forall C \in \mathbb{R}$.

⑤ $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

3. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN:

Định lí 1. *Cho* $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ *thì ta có:*

① $\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b$.

② $\lim(u_n.v_n) = a.b$.

③ $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

④ $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ *với* $u_n \geq 0$.

⑤ $\lim |u_n| = |a|$.

⑥ $\lim(k.u_n) = k.a,\ k \in \mathbb{R}$.

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC:

- Định nghĩa:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow$ với mỗi số dương tuỳ ý cho trước , mọi số hạng của dãy số , kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó .

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$.

  - Ta có:

    $\lim n^k = +\infty$ với mọi $k > 0$

    $\lim q^n = +\infty$ với mọi $q > 1$.

  - Định lí 2.

    a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

    b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$

B- CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1. Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

☑ *Thường phát biểu dưới dạng* $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

☑ ***Phương pháp giải:***

- *Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞" ở tử và mẫu.*
- *Khử bỏ n^k, đưa giới hạn về dạng xác định được.*
- *Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.*

☑ *Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng có tính "quyết định ∞" có dạng a^n.*

Ví dụ 1. Tính giới hạn

① $\lim \dfrac{2n-1}{3n+2}$.

② $\lim \dfrac{4n^2-2n+2019}{2020+3n-2n^2}$.

③ $\lim \dfrac{2020n+2}{n^2-n+1}$.

④ $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n-1}-3n}{2n+1}$.

BG:

1). $lim\frac{2n-1}{3n+2}=lim\frac{n(2-\frac{1}{n})}{n(3+\frac{2}{n})}=lim\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}$

2). $lim\frac{4n^2-2n+2019}{2020+3n+2n^2}=lim\frac{n^2(4-\frac{2}{n}+\frac{2019}{n^2})}{n^2(\frac{2020}{n^2}+\frac{3}{n}+2)}=lim\frac{4-\frac{2}{n}+\frac{2019}{n^2}}{\frac{2020}{n^2}+\frac{3}{n}+2}=\frac{4-0+0}{0+0+2}=2$

3). $lim\frac{2020n+2}{n^2-n+1}=lim\frac{n^2(\frac{2020}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=lim\frac{\frac{2020}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$

4). $lim\frac{\sqrt{n^2+n-1}-3n}{2n+1}=lim\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}-3n}{n(2+\frac{1}{n})}=lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}-3}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1-3}{2}=-1$

5). $lim\frac{2.3^n-2^{n+1}}{3^n+4}=lim\frac{3^n[2-2.(\frac{2}{3})^n]}{3^n[1+\frac{4}{3^n}]}=lim\frac{2-2.(\frac{2}{3})^n}{1+\frac{4}{3^n}}=\frac{2-2.0}{1+0}=2$

Dạng 2. Khử vô định dạng $\infty-\infty$

- *Thường phát biểu dưới dạng* $\lim\left(\sqrt{u_n}-v_n\right)$ *hoặc* $\lim\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)$.
- ***Phương pháp giải:***
  - *Nhân thêm lượng liên hợp cho cả tử và mẫu.*
  - *Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1.*

Ví dụ 2. Tính giới hạn

① $\lim\left(\sqrt{n-2019}-\sqrt{n+2020}\right)$.

② $\lim\left(\sqrt{4n^2+n-1}-\sqrt{4n^2+2n}\right)$.

③ $\lim\left(n+3-\sqrt{n^2-4n+1}\right)$.

④ $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)$.

BG:

1). $\lim\left(\sqrt{n-2019}-\sqrt{n+2020}\right)=lim\frac{(n-2019)-(n+2020)}{\sqrt{n-2019}+\sqrt{n+2020}}=lim\frac{-4039}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{2019}{n}}+\sqrt{1+\frac{2020}{n}}\right)}$

$$=\lim\left[\frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{-4039}{\sqrt{1-\frac{2019}{n}}+\sqrt{1+\frac{2020}{n}}}\right]=0.\frac{-4039}{2}=0$$

2). $\lim\left(\sqrt{4n^2+n-1}-\sqrt{4n^2+2n}\right)=lim\frac{(4n^2+n-1)-(4n^2+2n)}{\sqrt{4n^2+n-1}+\sqrt{4n^2+2n}}=lim\frac{-n-1}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{2}{n}}\right)}$

$$=lim\frac{-1-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{2}{n}}}=-\frac{1}{4}$$

3). $\lim\left(n+3-\sqrt{n^2-4n+1}\right)=\lim\left[\frac{n^2-(n^2-4n+1)}{n+\sqrt{n^2-4n+1}}+3\right]=lim\frac{4n-1}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}$

$$= lim\frac{4-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 2$$

4). $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right) = lim\frac{n^3-(n^3-n^2+1)}{n^2+n.\sqrt[3]{n^3-n^2+1}+(\sqrt[3]{n^3-n^2+1})^2} =$

$lim\frac{n^2-1}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}})^2\right)} = lim\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}})^2} = \frac{1}{3}$

Dạng 3. Giới hạn vô cực : Áp dụng định lí 2

Ví dụ 3. Tính giới hạn

① $\lim\left(n^4-2n^2+3\right)$.

② $\lim\left(-2n^3+3n-1\right)$.

③ $\lim\left(2n-\sqrt{n^3+2n-2}\right)$.

④ $\lim\frac{2n^4-3n^3+2}{n^3+2}$.

⑤ $\lim\frac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5+4n^3-1}$.

⑥ $\lim(5^n-2^n)$.

⑦ $\lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n}$.

BG:

1). $\lim(n^4-2n^2+3) = \lim\left[n^4\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)\right] = +\infty$

2). $\lim(-2n^2+3n-1) = \lim\left[n^3\left(-2+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)\right] = -\infty$

3). $\lim\left(2n-\sqrt{n^3+2n-2}\right) = \lim\left[n\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}\right)\right] = -\infty$

4). $\lim\frac{2n^4-3n^2+2}{n^3+2} = lim\frac{n^4(2-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4})}{n^3(1+\frac{2}{n^3})} = \lim\left(n.\frac{2-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{1+\frac{2}{n^3}}\right) = +\infty$

5). $lim\frac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5+4n^3-1} = lim\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right).n^6(3+\frac{2}{n^2})^3}{n^5(-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5})} = \lim[n^2\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right).(3+\frac{2}{n^2})^3}{-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}}] = -\infty$

6). $\lim(5^n-2^n) = \lim[5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)] = +\infty$

7). $lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n} = lim\frac{9^n[1-3.(\frac{4}{9})^n]}{8^n[6.(\frac{7}{8})^n+1]} = \lim[(\frac{9}{8})^n.\frac{1-3.(\frac{4}{9})^n}{6.(\frac{7}{8})^n+1}] = +\infty$